Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Daniel Palacín

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2019/2020

**Modelltheorie**
Blatt 8
Abgabe: 14.01.2020, 14 Uhr

**Aufgabe 1** (6 Punkte)**.**
In der Sprache $\mathcal{L} = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{<\}$, welche aus unendlich vielen Konstantenzeichen $c_n$ und aus einem 2-stelligen Relationszeichen besteht, betrachte die $\mathcal{L}$-Theorie $T$, deren Modelle genau alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart sind, dass die lineare Ordnung $<^{\mathcal{A}}$ dicht ohne Randpunkte ist und die Folge $(c_n^{\mathcal{A}})$ streng wachsend ist, das heißt, für jedes $n$ aus $\mathbb{N}$ gilt $c_n^{\mathcal{A}} < c_{n+1}^{\mathcal{A}}$.

*a*) Ist $T$ konsistent?

*b*) Zeige, dass $T$ vollständig ist und Quantorenelimination hat.

*c*) Zeige, dass $T$ genau bis aus Isomorphie drei abzählbare Modelle besitzt.

**HINWEIS:** Besitzt die Folge $(c_n^{\mathcal{A}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine obere Grenze?

**Aufgabe 2** (10 Punkte)**.**
In der Sprache $\mathcal{L} = \{c, f\}$, welche aus einem Konstantenzeichen $c$ und aus einem einstelligen Funktionszeichen $f$ besteht, sei $T$ die Kollektion aller $\mathcal{L}$-Aussagen, welche in folgender $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ gelten: Das Universum von $A$ ist die Menge von Paaren $(x, y)$ aus $\mathbb{R}^{\geq 0} \times \mathbb{Z}$, mit $y$ in $\mathbb{N}$, wenn $x = 0$, und mit Interpretationen der Symbolen $c^{\mathcal{A}} = (0, 0)$ und $f^{\mathcal{A}}(x, y) = (x, y + 1)$.

*a*) Zeige, dass $T$ Quantorenelimination hat.

**HINWEIS:** Syntaxis ist manchmal gut!

*b*) Gib eine explizite Axiomatisierung von $T$ an.

**HINWEIS:** Beschreibe das Bildbereich der injektiven Abbildung $f^{\mathcal{A}}$ in $\aleph_0$-saturierten Modelle.

*c*) Besitzt $T$ ein Primmodell? Wenn ja, beschreibe es.

*d*) Wie sehen abzählbare $\aleph_0$-saturierte Modelle aus? (Eine informelle Beschreibung genügt)

*e*) Ist $T$ schmal?

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.**
In der Sprache $\mathcal{L} = \{E\}$, welche aus einem 2-stelligem Relationzeichen $E$ besteht, sei $\mathcal{K}$ die Klasse der $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation ist, deren Klassen höchstens 2 Elementen besitzen.

Zeige, dass $\mathcal{K}$ eine Fraïssé Klasse besitzt und dass jede $E$-Äquivalenzklasse im Fraïssé Limes genau 2 Elementen besitzt.

---

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.